

# UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE ESPECTRAL DE SÉRIES TEMPORAIS ECONÔMICAS

Antonio Aguirre<sup>1</sup>

## 1 INTRODUÇÃO

As análises de séries temporais no domínio do tempo e no domínio da frequência são dois enfoques alternativos - porém complementares -, que formam parte da caixa de ferramentas analíticas da Econometria. Ambos os métodos beneficiaram-se com desenvolvimentos ocorridos nos últimos 25 anos, mais ou menos, que os colocaram ao alcance do pesquisador médio. Em particular, o avanço da tecnologia de computação beneficiou ambos os métodos mas, sobretudo, a análise espectral, cuja demanda computacional é formidável.

Apesar disso, persistem alguns problemas que dificultam o crescimento da utilização das técnicas de análise no domínio da frequência, devido principalmente à exigência de conhecimentos matemáticos que, usualmente, não formam parte da bagagem dos cientistas sociais. Basta mencionar, como exemplos, a necessidade de ter certa familiaridade com variáveis complexas, e a de conhecer a técnica analítica das Transformadas de Fourier.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução ao tema das Transformadas de Fourier, mostrando como essa técnica é usada em Econometria (análise de séries temporais, teoria das probabilidades e teoria dos processos estocásticos). É desnecessário acrescentar que tal apresentação será "não-formal" e "não-matemática", se é possível tratar desse tema sem se usar essa linguagem. A idéia é reduzir ao mínimo o uso de matemática, relegando para um apêndice as noções básicas indispensáveis, eliminando qualquer algebrismo e demonstrações. Com relação a esse último ponto, serão mencionadas as referências bibliográficas onde o leitor interessado poderá encontrar um tratamento mais formal do tema. Por último, será apresentado um exemplo concreto com a finalidade de mostrar uma aplicação simples dessa técnica.

A análise espectral nada mais é do que a soma da análise estatística das séries temporais mais os métodos de análise de Fourier. Por isso, é importante conhecer um pouco da história desse físico francês, tema que trataremos brevemente na próxima seção.

1 Professor do Departamento de Ciências Econômicas da FACE e pesquisador do CEDEPLAR-UFMG.

## 2 SÍNTESE HISTÓRICA DA EVOLUÇÃO DA ANÁLISE DE FOURIER

A idéia de usar "somadas trigonométricas", isto é, somas de senos e cossenos harmonicamente relacionados, para descrever fenômenos periódicos, remonta à época dos babilônios, que usaram métodos desse tipo para prever acontecimentos astronômicos (Carslaw, 1930; Oppenheim *et. al.*, 1983).

História moderna desse tema começa com Euler, autor da fórmula

$$y = \frac{1}{2} x = \text{sen } x - \frac{1}{2} 2x + \frac{1}{3} \text{sen } 3x - \dots$$

que nada mais é que a expansão de uma função de  $x$  numa série de senos (ver Apêndice).

Na metade do século XVIII havia surgido, como hipótese plausível no meio científico, a possibilidade de se expandir uma função arbitrária de  $x$  como uma série trigonométrica de senos e cossenos de múltiplos de  $x$ , no estudo do problema físico relacionado com a vibração de cordas (de um instrumento musical, por exemplo).

Assim como Lagrange, Euler descartou a possibilidade de se usar séries trigonométricas no problema da vibração de cordas. Coube a Fourier o mérito de aplicar esse método, não apenas no caso de funções cuja existência já tinha sido demonstrada, mas, também, na representação de funções totalmente arbitrárias. A motivação física para o trabalho de Fourier foi o fenômeno da propagação e difusão do calor. No seu trabalho, ele mostrou que séries de senóides harmonicamente relacionadas eram úteis para representar a distribuição da temperatura através de um corpo. Além disso, ele propôs que "qualquer" função **periódica** poderia ser representada por tais séries. Mas ele também obteve uma representação para séries **aperiódicas**, nesse caso não como somas de senóides harmonicamente relacionadas, mas como integrais ponderadas de senóides que não são necessariamente harmonicamente relacionadas.

A distinção entre o caso da representação de uma série **periódica**, e aquele de uma outra **aperiódica**, é importante, sendo que o segundo é o caso mais geral que inclui o primeiro como situação particular.

Se a série que está sendo representada é perfeitamente periódica, sua expansão é chamada **Série de Fourier**, e os respectivos coeficientes são os "Coeficientes de Fourier" ou "Constantes de Fourier".

Qualquer função periódica pode ser representada exatamente por uma série infinita de termos com senóides, sua série de Fourier. Se a soma inclui apenas um número finito de termos, a representação é aproximada e costuma-se chamá-la análise harmônica.

Se a função for aperiódica, pode ser representada por uma integral envolvendo senóides, e essa expansão é denominada **Transformada de Fourier**, ou **Integral de Fourier**. Feita essa distinção, pode-se usar a denominação mais geral para referir-se aos dois casos.

A distinção entre funções de tempo contínuo e de tempo discreto permite fazer o mesmo tipo de diferenciação nas transformadas. Portanto, existem Transformadas de Fourier de tempo contínuo e outras de tempo discreto.

Tal como se pode ver no Apêndice, o esforço computacional para obter a Transformada de Fourier de uma série com  $N$  observações é considerável. Tal esforço aumenta de forma polinomial, isto é, em proporção a  $N^2$ .

Em 1965, foi desenvolvido um algoritmo para calcular eficientemente as Transformadas de Fourier. Com esse algoritmo, chamado FFT (*Fast Fourier Transform*), o esforço computacional aumenta em proporção a  $N(\log_2 N)$ , em vez de  $N^2$ . Tal procedimento foi devido a Cooley e Tuckey (Cooley, Tuckey, 1965). O segundo dos autores foi responsável pelo desenvolvimento das técnicas necessárias para computar a Transformada de Fourier, enquanto que Cooley, um novo membro do centro de pesquisas da IBM em Yorktown Heights, USA, foi quem elaborou o programa de computador. Agora sabe-se que Cooley recebera a incumbência de realizar essa tarefa porque, na época, era o único membro do grupo que não tinha nenhuma outra coisa importante para fazer.

### 3 A ANÁLISE COM TRANSFORMADAS

A análise com transformadas é usada para simplificar a solução de problemas. Um exemplo fácil de se entender é o caso da transformação logarítmica, usualmente usado em Econometria para linearizar relações exponenciais, por exemplo. Na hipotética situação de se ter que realizar a divisão de dois números com precisão de muitos decimais, sem ter acesso a uma calculadora ou computador, o problema pode ser resolvido mediante "análise convencional", que se resume ao laborioso processo de divisão manual, ou mediante a "análise com transformadas". O último procedimento requer a consulta de uma

tabela especial para obter os logaritmos do dividendo e divisor, a subtração dos mesmos (operação muito mais simples que a divisão), e a transformação inversa (antilogaritmo) desse resultado para se ter a solução do problema original. Dessa forma, pode-se usar a técnica do logaritmo para transformar a operação de divisão em outra de subtração. A Transformada de Fourier é uma técnica que simplifica a solução de problemas de uma maneira semelhante. Assim, por exemplo, a convolução de duas funções no domínio do tempo transforma-se no produto das respectivas Transformadas de Fourier, no domínio da frequência.<sup>2</sup>

A transformação logarítmica, considerada no exemplo anterior, é fácil de se entender devido a sua unidimensionalidade. Com efeito, a função logarítmica transforma um **único valor de  $x$**  num único valor de  **$\log x$** . A dificuldade para interpretar a Transformada de Fourier deve-se ao fato de não se tratar de uma função que mapeia pontos para pontos, mas de um funcional que relaciona funções definidas de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Assim, diferentemente do que acontece na função logarítmica, no caso do funcional transforma-se uma função de uma variável definida de  $-\infty$  a  $+\infty$  em outra função, de outra variável também definida de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

A Transformada de Fourier identifica as senóides<sup>3</sup> de diferentes frequências (e suas respectivas amplitudes) que, somadas, formam uma curva periódica qualquer. O Gráfico 1 mostra um exemplo (Wonnacott, Wonnacott, 1972). Nesse caso, três senóides combinam-se para formar a função original  $y(t)$ .

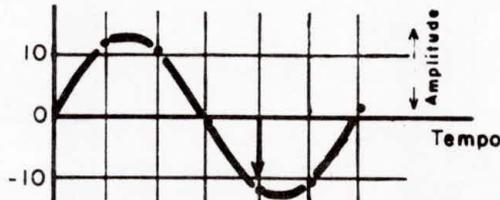
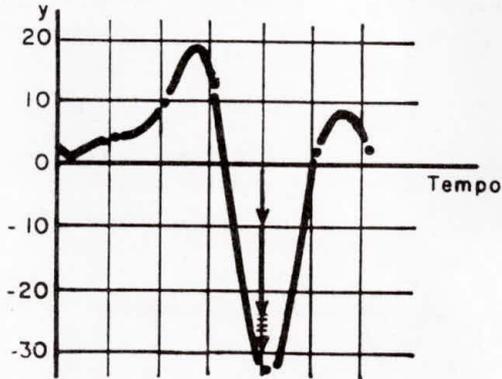
Portanto, a essência da Transformada de Fourier de uma função cíclica é a decomposição ou separação dessa função numa soma de senóides de diferentes frequências e, provavelmente, diferentes amplitudes. O Gráfico 2 ilustra essa interpretação no caso de uma função cíclica que pode ser expressa como a soma de duas senóides. Se essas senóides, quando somadas, reproduzem a função cíclica original, então temos a Transformada de Fourier da mencionada função cíclica. A representação gráfica da Transformada de Fourier da função cíclica é um diagrama que mostra a amplitude e a frequência de cada uma das senóides identificadas.

2 A convolução de duas funções é um importante conceito da Física, usado em diversos campos científicos. Contudo, a integral que define matematicamente essa operação não revela facilmente todas suas implicações. Uma interpretação gráfica da convolução pode ser encontrada em Brigham (1976). Ver Boyce, Difrância (1994, p. 238).

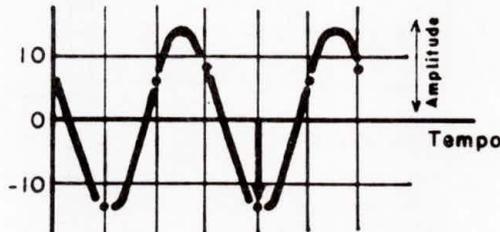
3 A expressão "senóide" inclui as funções seno e coseno. Ver Apêndice.

# Gráfico 1

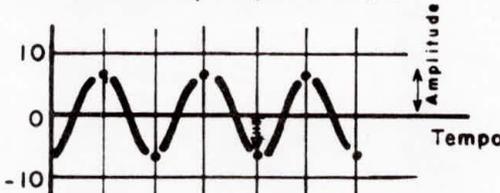
## Decomposição em senóides



Ciclo 1: período 6, frequência 1/6



Ciclo 2: período 3, frequência 2/6



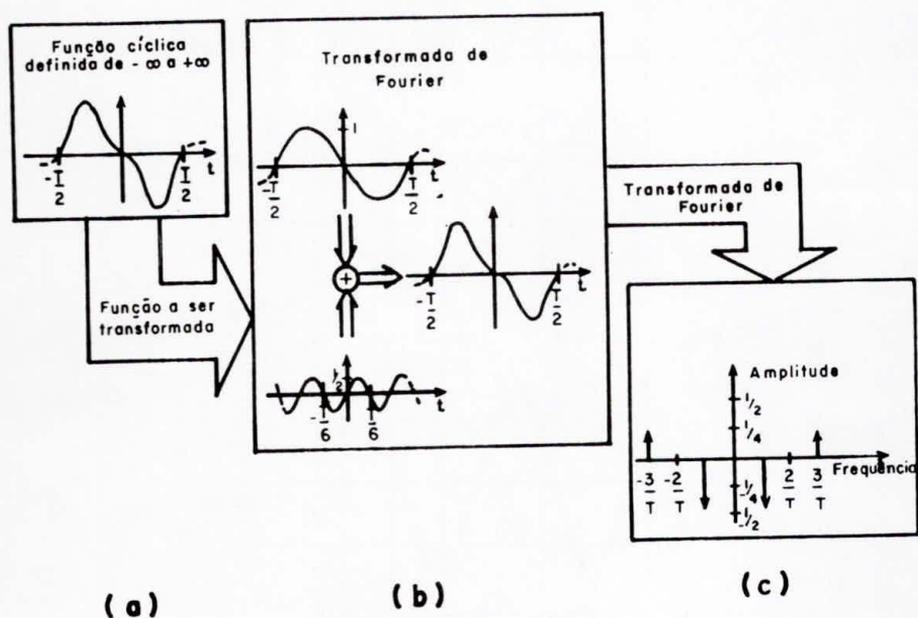
Ciclo 3: período 2, frequência 3/6

Fonte: Wonnacot, Wonnacot, 1972.

No Gráfico 2 (parte b), a primeira senóide tem período  $T$ , que corresponde a uma freqüência  $1/T$ , e amplitude 1 (ver Apêndice). A segunda senóide tem período menor,  $T/3$ , e amplitude igual a  $1/2$ . Seguindo a convenção usual, o mesmo gráfico (parte c) mostra senóides com freqüências positivas e negativas para cada uma das freqüências mencionadas, sendo que as amplitudes são divididas pela metade.

## Gráfico 2

### "Diagrama de Fluxo" da Transformada de Fourier



Fonte: Brigham, 1976.

Em resumo, a Transformada de Fourier mapeia a função cíclica representada no domínio do tempo na parte (a) do Gráfico 2, na função descontínua no domínio da frequência mostrada na parte (c) da mesma figura.

Matematicamente, a relação que permite passar do domínio do tempo ao domínio da frequência denomina-se **Equação de Análise**, ou **Integral de Fourier**, e escreve-se:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (1)$$

onde:  $i = \sqrt{-1}$ .

A relação que permite percorrer o caminho inverso, ou seja, recalculer a função cíclica no domínio do tempo a partir da função no domínio da frequência, denomina-se **Equação de Síntese**, ou **Transformada Inversa**, e é a seguinte:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad (2)$$

As relações 1 e 2, a menos de um fator de escala, formam o que usualmente se denomina "um par de Transformadas de Fourier". A primeira delas mostra que, para cada valor da variável "f", o correspondente valor da função  $X(f)$  é calculado fazendo a "soma" ponderada dos diferentes pontos da função cíclica original,  $x(t)$ , onde as ponderações são exponenciais complexas que variam com "t" e com "f". No caso da Transformada de Fourier em tempo discreto a integral é substituída por um somatório e, então, é mais fácil perceber a natureza dos cálculos envolvidos (ver Apêndice).

Em estatística, a função característica de uma variável aleatória  $X$  é dada pela Transformada de Fourier da função de densidade de probabilidade  $p(x)$ , com o sinal invertido (Hsu, 1970). Da mesma forma, o *power spectrum* ou espectro de poder (uma ferramenta da análise espectral) de um processo estocástico é dado pela Transformada de Fourier da função de autocorrelação do processo. Esses são dois exemplos de pares de Transformadas de Fourier que surgem nesta área. Os exemplos se multiplicam nas áreas de processamento de sinais, ótica, física quântica etc.<sup>4</sup>

4 No item Transformada Discreta de Fourier, no Apêndice, o leitor encontrará uma breve explicação de como se calcula o "espectro de poder" a partir da Transformada de Fourier.

## 4 A TRANSFORMADA DE FOURIER

Se a integral da equação 1 existe para cada valor do parâmetro " $f$ ", então a mesma define  $X(f)$ , a **Transformada de Fourier** de  $x(t)$ . Tipicamente,  $x(t)$  é chamada função da variável tempo e  $X(f)$  função da variável frequência.  $X(f)$  é, então, a representação de  $x(t)$  no domínio da frequência. Tal representação contém exatamente a mesma informação que aquela contida na função original. Ambas funções diferem apenas na forma de apresentar essa informação. A análise de Fourier nos permite examinar uma função de um ponto de vista diferente: o domínio da frequência.

Em geral, a Transformada de Fourier é uma quantidade complexa, ou seja:

$$X(f) = R(f) + iF(f) = |X(f)| e^{i\theta(f)}$$

onde:

- $R(f)$  é a parte real da Transformada de Fourier,  $X(f)$ ;
- $F(f)$  é a parte imaginária da Transformada de Fourier,  $X(f)$ ;
- $|X(f)|$  é a amplitude de  $X(f)$  ou o espectro de Fourier de  $x(t)$ , e é dado por  $\sqrt{R^2(f) + F^2(f)}$  ;
- $\theta(f)$  é o ângulo de fase da Transformada de Fourier, e é dado por  $\text{arc tg} \left[ \frac{F(f)}{R(f)} \right]$ .

Para ilustrar os vários termos definidos, considere-se a seguinte função da variável " $t$ ":

$$x(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Substituindo  $x(t)$  na Integral de Fourier 1, e integrando, obtém-se sua Transformada:

$$X(f) = \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - i \frac{2 \pi f \beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \quad (3)$$

Para cada valor de " $f$ " temos um número complexo diferente.

Outra forma de escrever a mesma transformada é a seguinte:

$$X(f) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}} e^{i \left( \arctan \left[ \frac{-2\pi f}{\alpha} \right] \right)}$$

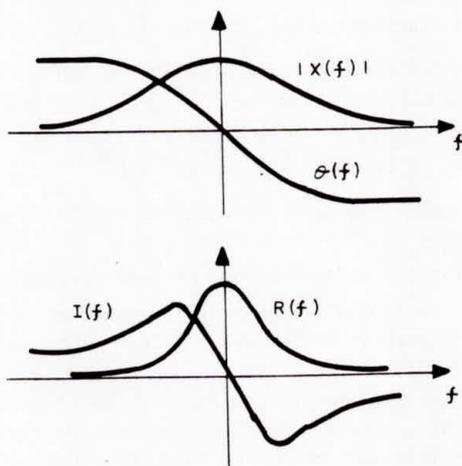
onde:

- parte real :  $R\{X(f)\} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$  ;
- parte imaginária :  $F\{X(f)\} = \frac{-2\pi f \beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$  ;
- módulo (ou amplitude):  $|X(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$  ;
- ângulo de fase:  $\theta(f) = \arctan \left[ \frac{-2\pi f}{\alpha} \right]$ .

O Gráfico 3 mostra a representação dessas quatro relações como funções da variável "f" (frequência).

### Gráfico 3

Funções da variável "f"



Uma situação na qual se usa a análise espectral é quando se trata de ajustar um modelo estatístico aos dados de um processo qualquer. Como cada tipo de modelo tem um espectro com características próprias, o primeiro passo consiste em estimar a forma espectral dos dados para obtermos uma indicação do tipo de modelo que melhor poderia ajustar os mesmos. Depois, procuramos num "dicionário" de modelos-padrão para ver se encontramos um com características espectrais semelhantes.

## 5 UM EXEMPLO

Outro uso da Transformada de Fourier é na procura das freqüências que compõem uma série que está misturada com ruídos no domínio do tempo.<sup>5</sup> O "espectro de poder", uma medida da variância explicada pelas várias freqüências - e calculada a partir da Transformada de Fourier da série original - é útil para detectar periodicidades que não são facilmente discerníveis ao "olho nu" em função da superposição de diversas freqüências e da presença inevitável de variações aleatórias ou ruído.

Considere-se, por exemplo, a série dos preços mensais do boi gordo no Estado de São Paulo no período março/54 - fevereiro/81 (Gráfico 4).<sup>6</sup> Nesse período de 27 anos os preços nominais foram expressos nas várias unidades monetárias existentes no País, e sofreram aumentos devido ao processo inflacionário ocorrido. Por esse motivo, os primeiros ajustes realizados na série dizem respeito à homogeneização das unidades e à deflação dos valores para expressá-los em moeda de poder aquisitivo constante. Para esse último fim usou-se o IGP (Índice Geral de Preços) da Fundação Getúlio Vargas.

Como a série é não-estacionária,<sup>7</sup> foi ajustada uma tendência linear à mesma, calculando-se a seguir os resíduos com relação à reta de regressão. Usando a série de resíduos foi calculado o *power spectrum* que está apresentado no Gráfico 5.<sup>8</sup>

5 Essa é uma aplicação univariada. Um exemplo de análise espectral multivariada pode ser encontrada em Pastore (1994).

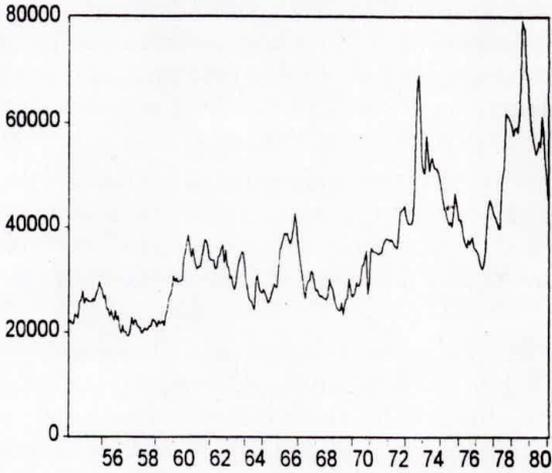
6 As razões pelas quais consideramos esse período são simplesmente didáticas.

7 O teste de raiz unitária não rejeita a hipótese nula de não estacionariedade aos níveis usuais de significância. O mesmo teste rejeita essa hipótese no caso das primeiras diferenças da série.

8 Ao contrário da Transformada de Fourier, o espectro de poder é um vetor real. Conseqüentemente, o espectro de poder perde a informação contida na fase. Recuperar esta informação tem sido o objetivo ao desenvolver e usar o que se chama *Higher-Order Spectra* (Nikias, Mendel, 1993).

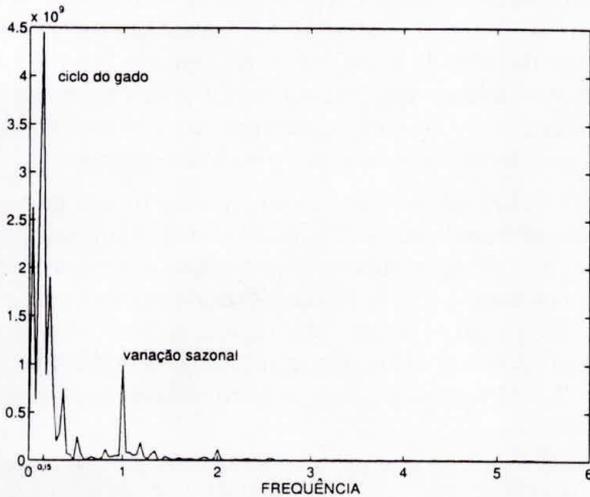
### Gráfico 4

Preço real médio do boi gordo no Estado de São Paulo  
- mar/54-fev/81 -  
(Cruzeiros reais de abr/94 por arroba)



### Gráfico 5

Espectro de poder dos resíduos da tendência



O espectro de potência de uma série totalmente aleatória (ruído branco) é teoricamente constante, ou seja, não mostra nenhuma estrutura espectral. Por isso, ao analisarmos o espectro de uma série qualquer estamos interessados em detectar e interpretar os picos que possam existir, e as frequências às quais estão associados. No Gráfico 5 o maior pico está vinculado com o valor de frequência  $f_1 = 0,15$ . Dois valores relativamente altos a ambos os lados são harmônicos e sub-harmônicos do pico principal.<sup>9</sup> Outro pico importante aparece associado com a frequência unitária ( $f_2$ ), e também apresenta harmônicos com frequências um pouco menores e maiores que a unidade.

A variável frequência mostra o número de ciclos completados por unidade de tempo. Apesar da frequência de amostragem dos dados ser mensal, a escala horizontal do Gráfico 5 foi construída de maneira tal que o valor unitário está associado com um período de um ano.

O pico maior, correspondente à frequência  $f_1$ , está associado com um período de 6,82 anos (82 meses). Isso significa que nos dados existe um ciclo de baixa frequência, que se repete a cada 6,82 anos, e que explica uma porção importante da variância total da série. Assim, esse pico detecta o chamado "ciclo do gado", tão conhecido na literatura especializada em pecuária (Dean, Heady, 1958; Iver, 1971; Jarvis, 1974; Fundação João Pinheiro, 1979; Silva, 1984; Mueller, 1987; Nerlove, Grether, Carvalho, 1988; Rosen, Murphy, Scheinkman, 1994).

O pico relativamente alto observado na frequência 1 significa que um outro ciclo também é importante na explicação da variância total da série. Esse ciclo de maior frequência - que se completa num período de um ano -, descreve as variações intra-anuais (variações sazonais) que correspondem ao conhecido fenômeno da oscilação dos preços reais entre safra e entressafra.

Como todo processo dinâmico não-linear gera espectros de poder com harmônicos e sub-harmônicos dos principais componentes de frequência, os picos menores existentes a ambos lados dos dois anteriormente comentados são considerados apenas como harmônicos ou sub-harmônicos dos ciclos principais e não têm interpretação econômica. O pico com frequência igual a 2 é, sem dúvida, o harmônico de frequência  $2f_2$ . O primeiro pico, à esquerda do principal, parece ser

9 Aqui se deveria usar algum dos testes existentes na literatura para testar a significância desses picos, mas esse assunto não será tratado nesse artigo introdutório.

um sub-harmônico dele, já que está associado com a frequência igual a  $f_1/4$ . As frequências dos cinco picos à direita do principal coincidem, com razoável aproximação, com as seguintes combinações lineares:  $2f_2 - 12f_1$ ,  $2f_2 - 11f_1, \dots, 2f_2 - 8f_1$ , respectivamente.

Finalmente, cabe mencionar que, quando se calcula o espectro de poder das diferenças de 12ª ordem dos resíduos, o componente da frequência unitária desaparece totalmente, os picos identificados como harmônicos e sub-harmônicos no parágrafo anterior se modificam, e apenas o componente de baixa frequência permanece inalterado. Toda esta evidência parece confirmar nossas interpretações.

Dessa forma, a análise espectral revela a existência de dois ciclos: um, de curto período (12 meses), reflete as variações sazonais que afetam os preços da arroba de boi gordo dentro de cada ano; o outro, de longo período (82 meses), espelha as características próprias do processo produtivo da pecuária no mundo inteiro, que se traduzem no chamado "ciclo do gado".

## 6 RESUMO E CONCLUSÕES

Nesse trabalho discute-se, de forma introdutória, a natureza da Transformada de Fourier. Menciona-se, também, o algoritmo denominado *Fast Fourier Transform* que permite seu cálculo. Esse algoritmo está disponível em vários pacotes executáveis em microcomputadores.<sup>10</sup> Dada uma série qualquer, essas técnicas permitem o cálculo de um par de Transformadas de Fourier, a saber: o espectro de potência e a função de autocorrelação. Essa última é conhecida na análise de séries temporais no domínio do tempo e, em princípio, pode ser estimada sem necessidade de se recorrer à Transformada de Fourier.

A função de densidade espectral ou espectro de poder contém informações sobre a série original obtida focalizando de um ponto de vista diferente: o domínio da frequência. A informação por ela proporcionada indica-nos quais as frequências que explicam as maiores proporções da variância total da série.<sup>11</sup> Dessa forma, essa técnica é útil na identificação de ciclos escondidos no meio das variações aleatórias ou ruído.

10 Um deles é o MATLAB\copyright, ou *Matrix Laboratory*.

11 Nesse trabalho não se discute a determinação da significância estatística de diferentes faixas de frequência.

Como um exemplo da aplicação dessas técnicas calcula-se o espectro de poder dos resíduos da regressão de tendência linear da série dos preços médios mensais - em termos reais - do boi gordo no Estado de São Paulo no período mar/54-fev/81. Assim, mostra-se como a interpretação da análise revela a existência de dois ciclos que são interpretados como as conhecidas variações sazonais (safra e entressafra) e o "ciclo do gado" presentes na série de preços analisada.

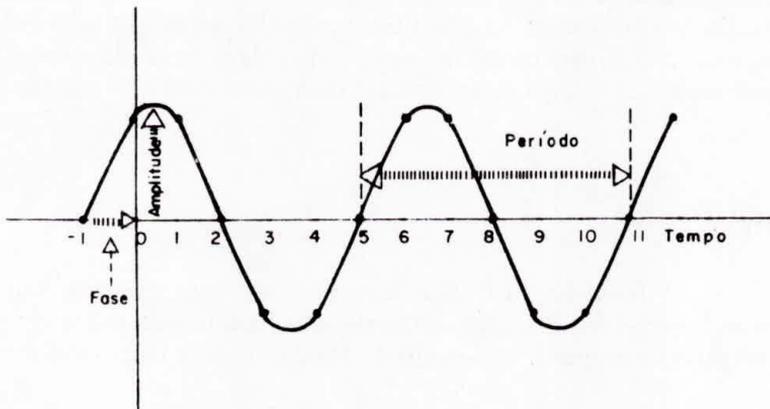
## APÊNDICE

### CICLOS

O conceito de ciclo implica na repetição regular num lapso fixo de tempo - chamado período - da transição do pico ao vale, e de volta ao pico. O Gráfico A1 apresenta uma função cíclica, mostrando as três características de um ciclo: amplitude, fase, e período. Nesse exemplo o período de 6 unidades de tempo (dias, meses etc.). A frequência definida como o número de ciclos completados numa unidade de tempo, ou seja, é a inversa do período. Nesse caso, numa unidade de tempo transcorre apenas  $1/6$  de um ciclo completo.

**Gráfico A1**

Características de um ciclo



## AMPLITUDE

A amplitude refere-se à magnitude da distância vertical entre pico e vale numa função cíclica.

## EXPANSÃO EM SÉRIE

Uma expansão substitui uma função por um somatório de termos que é equivalente quando o número de termos tende a infinito. Por exemplo, se  $0 < x < 1$ ,

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

é uma expansão em série.

## FASE

No momento  $t=0$  uma função cíclica pode atingir um pico, um vale, ou qualquer outro valor intermediário, dependendo da "posição" da mesma com relação ao eixo do tempo. Essa idéia de "posição", ou etapa da evolução de um ciclo periódico é chamada "fase". Duas funções cíclicas podem ter a mesma amplitude e o mesmo período mas, se têm fases diferentes, diz-se que uma está defasada com relação à outra: existe um descompasso entre elas. Um exemplo disso são as funções *seno* e *coseno* que, indistintamente, são chamadas "senóides".

## FREQÜÊNCIA

A freqüência indica a velocidade com que um fenômeno cíclico se repete. Assim, uma onda de alta freqüência passa do pico-ao vale-ao pico num curto intervalo de tempo, ou curto período.

## PERÍODO

O período é o inverso da freqüência.

## RELAÇÕES DE EULER

O seguinte par de identidades

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i \operatorname{sen} \theta$$

$$e^{-i\theta} \equiv \cos\theta - i \operatorname{sen} \theta$$

Permite-nos traduzir qualquer função exponencial imaginária em termos de uma combinação linear equivalente de senóides, e vice-versa (Chiang, 1982).

## SENÓIDES

Essa expressão inclui as funções seno e cosseno. A propriedade básica das senóides que as habilitam como funções adequadas para a análise de séries temporais é seu comportamento sob mudança na escala do tempo.

Uma senóide com freqüência  $\omega$  (em radianos por unidade de tempo), ou período  $2\pi/\omega$  pode ser escrita como:

$$f(t) = R \cos(\omega t + \phi)$$

onde  $R$  é a amplitude e  $\phi$  é a fase.

Se mudarmos a variável tempo mediante uma transformação linear que implique, além da mudança de escala, uma nova origem, tal como:

$$u = \frac{t - a}{b}$$

ou

$$t = a + bu$$

temos:

$$g(u) = f(a + bu) = R \cos[\omega(a + bu) + \phi] = R' \cos(\omega' u + \phi')$$

onde:

$$R' = R$$

$$\omega' = \omega b$$

$$\phi' = \phi + \omega a$$

Assim, a amplitude não muda, a freqüência é multiplicada por  $b$  (a inversa do fator de mudança na escala do tempo), e a fase é alterada numa magnitude que envolve a mudança da origem e a freqüência da senóide.

## TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Considere-se, como exemplo, o seguinte vetor  $x(n)$  de comprimento  $N=5$ :

$n$	$x(n)$
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1

A Transformada Discreta de Fourier do vetor  $x(n)$  é outro vetor obtido com a seguinte fórmula:

$$\bar{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{ik2\frac{\pi}{N}n}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Os elementos do vetor  $X(k)$  são os seguintes:

$$\bar{X}(0) = (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 15$$

$$\bar{X}(1) = [5 + 4e^{-i\frac{2}{5}\pi} + 3e^{-i\frac{4}{5}\pi} + 2e^{-i\frac{6}{5}\pi} + e^{-i\frac{8}{5}\pi}] = 2,5 - 3,441i$$

$$\bar{X}(2) = [5 + 4e^{-i\frac{4}{5}\pi} + 3e^{-i\frac{8}{5}\pi} + 2e^{-i\frac{12}{5}\pi} + e^{-i\frac{16}{5}\pi}] = 2,5 - 0,8123i$$

$$\bar{X}(3) = [5 + 4e^{-i\frac{6}{5}\pi} + 3e^{-i\frac{12}{5}\pi} + 2e^{-i\frac{18}{5}\pi} + e^{-i\frac{24}{5}\pi}] = 2,5 + 0,8123i$$

$$\bar{X}(4) = [5 + 4e^{-i\frac{8}{5}\pi} + 3e^{-i\frac{16}{5}\pi} + 2e^{-i\frac{24}{5}\pi} + e^{-i\frac{32}{5}\pi}] = 2,5 + 3,441i$$

Como se pode ver, a Transformada de Fourier de um vetor real produz um vetor complexo. Para se obter o espectro de poder - que é, novamente, um vetor real - multiplica-se cada elemento do vetor complexo pelo seu conjugado.

Outra forma de se obter o espectro de potência de uma série é aplicando a Transformada de Fourier à correspondente função de autocorrelação. Como o espectro de poder e a função de autocorrelação de uma série formam um "par de Fourier", o algoritmo da FFT (*Fast Fourier Transform*) é eficiente no cálculo de ambas.

## BIBLIOGRAFIA

- BOYCE, W. E., DiPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro : Editora Guanabara Koogan, 1994.
- BRACEWELL, R. N. *The fourier transform and its applications: an approach through convolution*. New York : McGraw-Hill Book, 1986.
- BRIGHAM, E. O. *The fast fourier transform*. New Jersey : Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- CARSLAW, H. S. *Introduction to the theory of fourier's series and integrals*. New York : Dover Publications, 1930.
- CHIANG, A. C. *Matemática para economistas*. São Paulo : Makron Books do Brasil Editora, 1982.
- COOLEY, J. W., TUCKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, v. 19, n. 90, p. 297-301, 1965.
- CRAIG, E. J. *Laplace and Fourier Transforms for electrical engineers*. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1966.
- DEAN, G. W., HEADY, E. O. Changes in supply response and elasticity for hogs. *Journal of Farm Economics*, v. 40, n. 4, p. 845-860, 1958.
- FUNDAÇÃO JOÃO PINHEIRO. *Programa nacional de pecuária*, v. XIII, Belo Horizonte, 1979.
- GOTTMAN, J. M. *Time-series analysis: a comprehensive introduction for social scientists*. Cambridge : Cambridge University Press, 1981.
- HSU, H. P. *Fourier analysis*. New York : Simon and Schuster, 1970.
- IVER, R. *The investment behavior and the supply response of the cattle industry in Argentina*. Chicago : Universidade de Chicago, 1971. (Tese de doutorado, não publicada).
- JARVIS, L. S. Cattle as capital goods and ranchers as portfolio managers: an application to the Argentine cattle sector. *Journal of Political Economy*, v. 82, n. 3, p. 489-520, 1974.

- MUELLER, C. C. O Ciclo do gado e as tentativas governamentais de controle do preço da carne. *Estudos Econômicos*, v. 17, n. 3, p. 435-456, 1987.
- NERLOVE, M., GREETHER, D. M., CARVALHO, J. L. *Análisis de series temporales económicas*. Mexico : Fondo de Cultura Económica, 1988.
- NIKIAS, C. L., MENDEL, J. M. Signal processing with higher-order spectra. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 10, n. 7, p. 10-37, 1993.
- OPPENHEIM, A. V., WILLSKY, A. S. *Signals and systems*. London : Prentice-Hall International, 1983.
- PASTORE, A. C. Flutuações cíclicas e indicadores da atividade industrial. *Revista Brasileira de Economia*, v. 48, n. 3, jul/set. 1994, p. 247-294.
- ROSEN, S., MURPHY, K. M., SCHEINKMAN, J. A. Cattle cycles. *Journal of Political Economy*, v. 102, n. 3, p. 468-492, 1994.
- SILVA, J. A. B. B. da. *Measuring the effects of government policies on brazilian agriculture, with particular emphasis on the beef and dairy sectors*. Manchester : University of Manchester, 1984. (Tese de doutorado, não publicada).
- WONNACOTT, R. J., WONNACOTT, T. R. *Introductory statistics for business and economics*. New York : Wiley, 1972.